Nachhilfestunde 1

$f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$

Zur Untersuchung einer Sinusfunktion. Grundlagen

Niveau: Leistungskurs Gymnasium

KEIN ANFÄNGERTEXT

Datei Nr. 47021

Stand 13. April 2025

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik und Studium

https://mathe-cd.de

VORWORT

In dieser Nachhilfestunde, die in 16 Abschnitte gegliedert ist, geht es um die Sinuskurven der Art $y = a \cdot \sin(bx + c)$. Wir besprechen ausführlich grundlegende Methoden zu Untersuchung dieser Kurven, und wie sie aus $y = \sin(x)$ durch Abbildungen erzeugt werden können.

Die Lösungen sind teilweise auf LK-Niveau.

Wichtige Fakten werden als Grundwissen mit $\boxed{\text{GW}}$ gekennzeichnet.

Inhalt

Diese Inhalte werden besprochen:

$\boxed{1}$ Grundwissen zu $y = \sin(x)$: Werte, Periode, Kurve

$\boxed{2}$ Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte

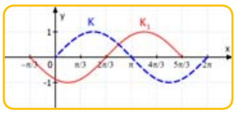
$\boxed{3}$ $y = \sin(x) + 1$ entsteht durch eine Verschiebung in y-Richtung

$\boxed{4}$ $y = \sin(x + 1)$ entsteht durch eine Verschiebung in die negative x-Richtung

$\boxed{5}$ $y = \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$, $y = \sin(x + 4)$, $y = \sin(x - \pi)$

$\boxed{6}$ $y = \sin(x + \pi) - 2$

$\boxed{7}$ $y = -\sin(x)$

$\boxed{8}$ und $\boxed{9}$: Gleichung bestimmen: 

$\boxed{10}$ $y = 2 \cdot \sin(x)$ Streckung in y-Richtung

$\boxed{11}$ $y = \sin(2x)$ Streckung in x-Richtung.

$\boxed{12}$ $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

$\boxed{13}$ Abbildungsgleichungen zur x-Streckung

$\boxed{14}$ $y = \sin(\pi \cdot x) + 1$ Durch Abbildungen aus $y = \sin(x)$ erzeugen

$\boxed{15}$ $y = 4 \cdot \sin(3x)$ Durch Abbildungen aus $y = \sin(x)$ erzeugen

$\boxed{16}$ $y = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\pi\right)$ Durch Abbildungen aus $y = \sin(x)$ erzeugen

$\boxed{1}$ Wir untersuchen hier Funktionen des Typs $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$.

Ihre Schaubilder nennt man **Sinuskurven**: $y = a \cdot \sin(bx + c)$

Das Verblüffende daran ist, dass man alle diese Sinuskurven durch vier Arten von Abbildungen aus der **Basiskurve** $\mathbf{y = \sin(x)}$ gewinnen kann. Dies sind <u>Verschiebung in x-Richtung</u>, <u>Verschiebung in y-Richtung</u>, Streckung in y-Richtung und Streckung in x-Richtung. Wenn man gelernt hat, wie man schnell die geeigneten Abbildungen erkennt, dann kennt man schnell, welche Eigenschaften eine gegebene Sinuskurve hat.

Grundlage dazu ist natürlich das Grundwissen über die Eigenschaften der Basiskurve. Diese besprechen wir natürlich zuerst.

$\boxed{\text{GW}}$ Die Zeichnung der Kurve $y = \sin(x)$ erfordert die Kenntnis einiger Punkte bzw. Sinuswerte. x wird dabei entweder im ***Gradmaß*** verwendet oder im ***Bogenmaß***.

Betreibt man Geometrie, nimmt man das Gradmaß, trägt man die Werte im Achsenkreuz ab und erzeugt so eine Kurve, kommt in der Regel das Bogenmaß zum Einsatz.

Diese wichtigen Werte sollte man wissen: *Bitte LERNEN !*

Die Wertmenge ist: $\mathbb{W} = [-1;1]$

Die Periodenlänge: $\Delta x = 2\pi$.

Das heißt: Nach dieser Strecke hat die Funktion wieder denselben Wert:

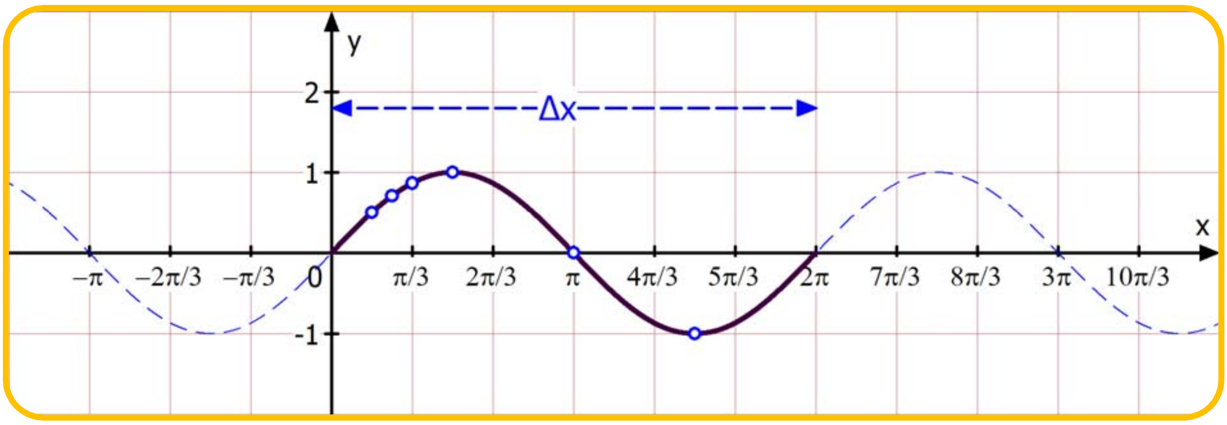
$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$
$$\sin(x + 4\pi) = \sin(x)$$
$$\ldots$$
$$\sin(x - 2\pi) = \sin(x)$$

Allgemein gilt:

$\boxed{\sin(x + z \cdot 2\pi) = \sin x}$, für $z \in \mathbb{Z}$

Gradmaß	Bogenmaß	sin x
$x = 0^\circ$	$x = 0$	0
$x = 30^\circ$	$x = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$x = 45^\circ$	$x = \frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}707$
$x = 60^\circ$	$x = \frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}866$
$x = 90^\circ$	$x = \frac{\pi}{2}$	1
$x = 180^\circ$	$x = \pi$	0
$x = 270^\circ$	$x = \frac{3}{2}\pi$	-1
$x = 360^\circ$	$x = 2\pi$	0

Sinuskurve mit einer Bogenmaßskala auf der x-Achse:



$\boxed{2}$ Die **Schnittpunkte mit der x-Achse** sind $N_0(0\,|\,0), N_1(\pi\,|\,0)$ und dann alle um ganzzahlige Vielfache von π in x-Richtung verschobene Punkte.

Man kann sie allgemein so aufschreiben: $N_z(z\cdot\pi\,|\,0)$ mit $z\in\mathbb{Z}$

Die Sinuskurve y = sin(x) hat unendlich viele **Hochpunkte**, die alle auf der Geraden y = 1 liegen: $H_1\left(\frac{1}{2}\pi\,|\,1\right),\ H_2\left(\frac{5}{2}\pi\,|\,1\right),\ H_3\left(\frac{9}{2}\pi\,|\,1\right),$ usw.

Es reicht hier, den „innersten" Hochpunkt zu kennen, also $H_1\left(\frac{1}{2}\pi\,|\,1\right)$.

Weil die Kurve die Periode $\Delta x = 2\pi$ hat, sind alle Punkte, die aus H_1 durch Verschiebung um 2π nach links oder rechts entstehen auch Hochpunkte.

Man kann sie so angeben: $H_z\left(\frac{1}{2}\pi+2z\cdot\pi\,|\,0\right)$ mit $z\in\mathbb{Z}$

Da $\mathbb{Z}$ auch die negativen ganzen Zahlen umfasst, sind auch die Hochpunkte erfasst, die negative x-Koordinaten haben.

Die Sinuskurve y = sin(x) hat unendlich viele **Tiefpunkte**, die alle auf der Geraden y = -1 liegen: $T_1\left(\frac{3}{2}\pi\,|\,-1\right),\ T_2\left(\frac{7}{2}\pi\,|\,-1\right),\ T_3\left(\frac{11}{2}\pi\,|\,-1\right),$ usw.

Man kann die Tiefpunkte mit dieser Formel angeben: $T_z\left(\frac{3}{2}\pi+2z\cdot\pi\,|\,-1\right)$ mit $z\in\mathbb{Z}$.

Bleiben noch die **Wendepunkte**: Sie sind identisch mit den Schnittpunkten mit der x-Achse.

Nach diesen fundamental wichtigen Fakten, die man unbedingt wissen oder herleiten können soll, wollen wir diese Sinuskurve verschieben.

Kannst du beschreiben, durch welche Verschiebung die folgenden Kurven aus unserer Basiskurve y = sin(x) entstanden sind?

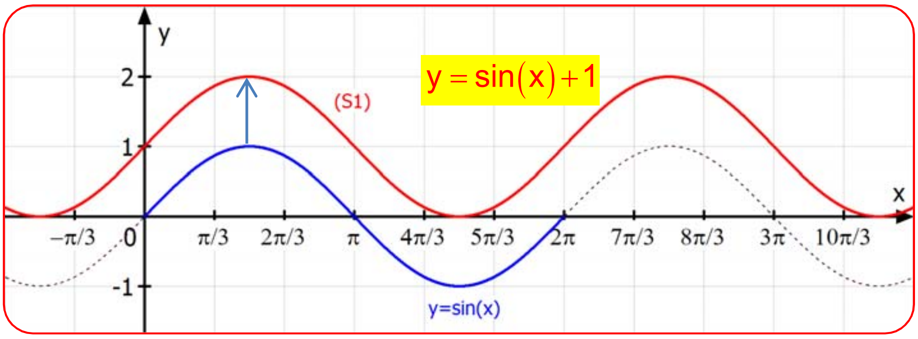
(S1): $y=\sin(x)+1$

(S2): $y=\sin(x+1)$

Meine Lösungen stehen in den Abschnitten

$\Rightarrow$ $\boxed{3}$ und $\boxed{4}$

$\boxed{3}$



Die y-Koordinaten werden durch +1 um 1 vergrößert:

(S1) entsteht aus y = sin(x) durch eine Verschiebung um 1 in y-Richtung.

Daher kann man beispielsweise die Hochpunkte sofort auf (S1) umrechnen: $H_z\left(\frac{1}{2}\pi + 2\pi \mid \mathbf{2}\right)$.

$\boxed{4}$ (S2) $y = \sin(x+1)$ bzw. $f_2(x) = \sin(x+1)$

Methode: Vergleiche K_1: $y = \sin(x)$ mit (S2) $y = \sin(x+1)$

indem du zwei Punkte mit der gleichen y-Koordinate bestimmst:

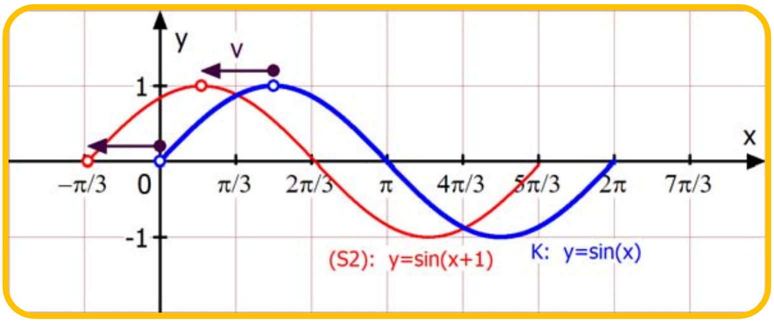
Ich wähle z. B. $\boxed{y = \sin(0) = 0}$ auf K:

Bei (S2) erreicht man das durch x = -1: $\sin\left(\boxed{-1}+1\right) = 0$

Das bedeutet dass K um 1 nach links verschoben wird zu $y = \sin(x+1)$.

Also wird $P(0 \mid 0)$ verschoben nach $P'(-1 \mid 0)$

Ergebnis: Der Übergang von K zu (S2) ist eine Verschiebung um 1 nach links.



Man kann sich das Ergebnis so merken:

Weil im Argument der Sinusfunktion **+1** steht, benötigt man für den gleichen y-Wert bei (S2) eine um 1 kleinere x-Koordinate.
Der verschobene Kurvenpunkt von (S2) steht also um 1 weiter links.

Wie entsteht wohl die nächste Kurve aus K: y = sin(x)?

(S3): $y = \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$ $\Rightarrow$ $\boxed{5}$

$\boxed{5}$ Du hast gesehen und hoffentlich verstanden, dass die Kurve $y = \sin(x+1)$ aus $y = \sin(x)$ durch eine Verschiebung um 1 nach links entsteht.

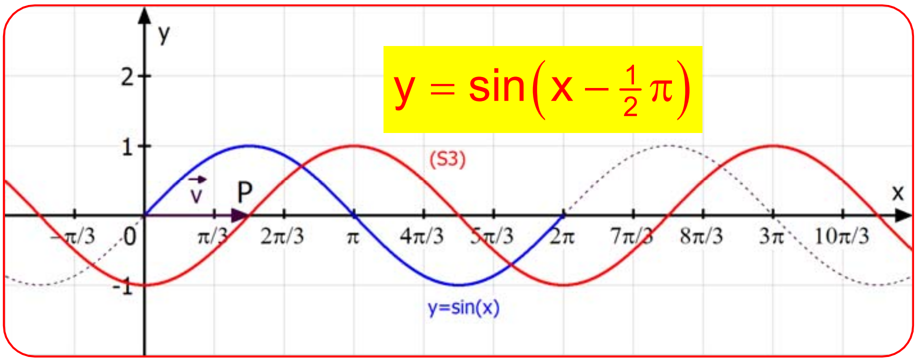
Analog dazu ist dann (S3) $y = \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$ um $\frac{1}{2}\pi$ nach rechts verschoben.

Das kann man so erklären:

Ich wähle für K: $y = \sin(0) = 0$

Dazu gehört bei (S3): $y = \sin\left(\boxed{\tfrac{1}{2}\pi} - \tfrac{1}{2}\pi\right) = \sin(0) = 0$

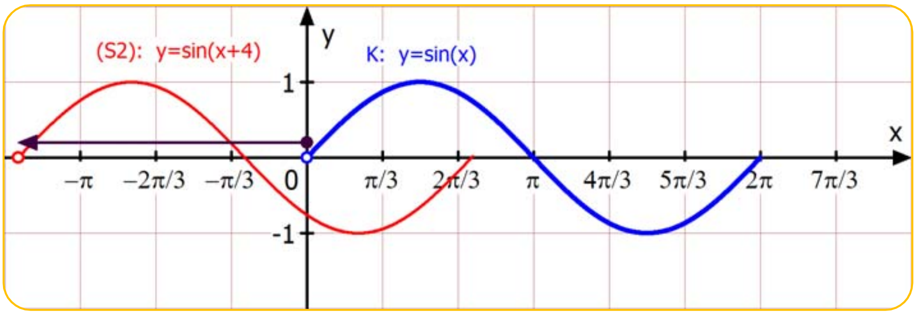
Also wird $P(0\,|\,0)$ verschoben nach $P'\left(\frac{1}{2}\pi\,|\,0\right)$, also um $\frac{1}{2}\pi$ nach rechts.



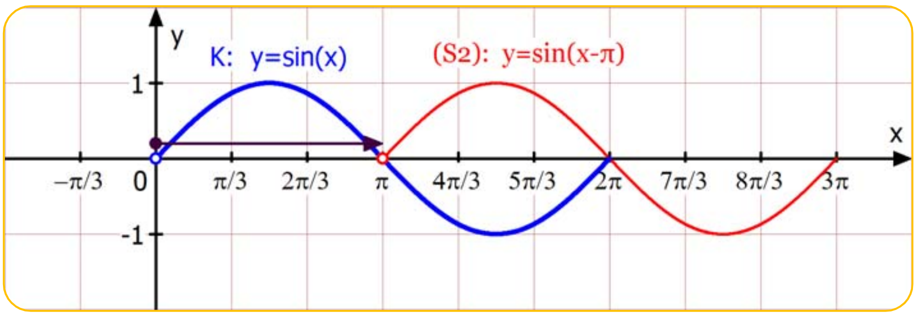
Wenn man das Prinzip verstanden hat, ist diese Geschichte banal:

Noch zwei Beispiele:

$y = \sin(x+4)$ entsteht aus $y = \sin(x)$ durch Verschiebung um 4 nach links.



$y = \sin(x-\pi)$ entsteht aus $y = \sin(x)$ durch Verschiebung um π nach rechts



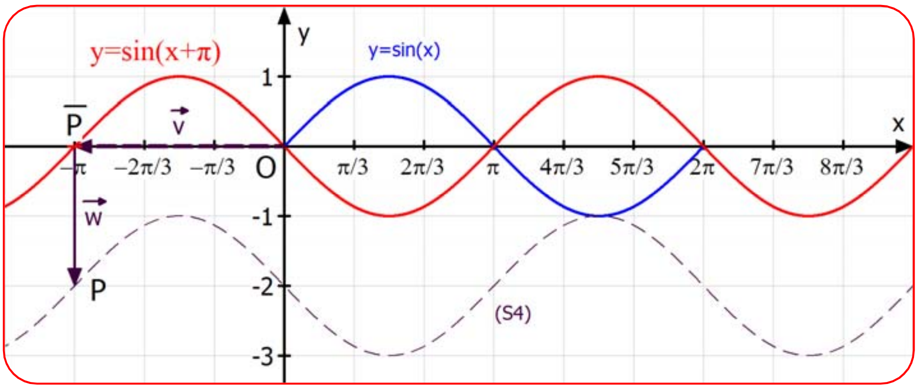
Wie entsteht die nächste Kurve aus K: y = sin(x)?

(S4) $y = \sin(x+\pi) - 2$ $\Rightarrow$ $\boxed{6}$

$\boxed{6}$ Wir verschieben K: $y = \sin(x)$ um π nach links.

Dann entsteht $y = \sin(x+\pi)$

Und dann um 2 nach unten: $y = \sin(x+\pi) - 2$ (S4).



$\boxed{7}$ Nun spiegeln wir die Sinuskurve an der x-Achse

Das ist nun „unbeabsichtigt" in unserer Grafik in $\boxed{6}$ enthalten:

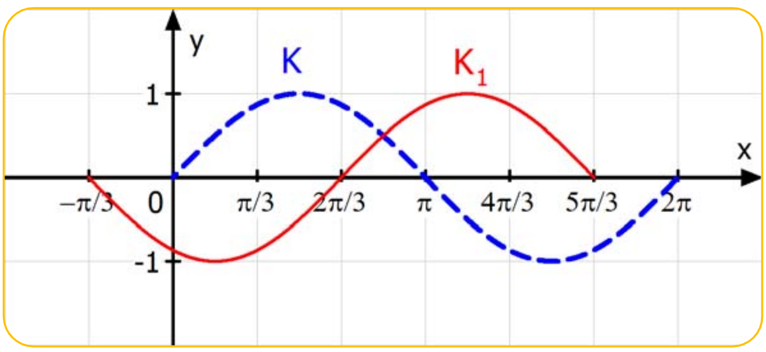
Ich habe oben K: y = sin(x) um π nach links verschoben. So wurde aus der blauen Kurve die rote $y = \sin(x+\pi)$. Und diese ist aber auch das Spiegelbild von K an der x-Achse.
Dann erhält sie auch die Gleichung:

$$y = -\sin(x)$$

Wir merken uns, dass der y-Faktor (-1) vor Sinus eine Spiegelung an der x-Achse bewirkt.

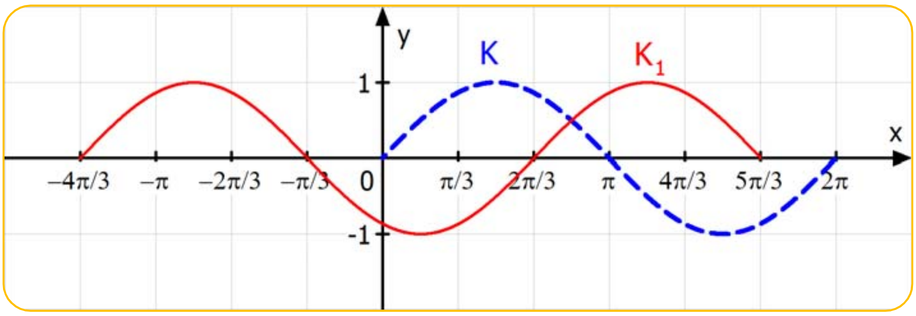
$\boxed{8}$ Aufgabe:

Schreibe bitte <u>mindestens *zwei*</u> Gleichungen für die Kurve K_1 auf:



$\Rightarrow \boxed{9}$

$\boxed{9}$



Zunächst einmal habe ich einen größeren Ausschnitt von K_1 gezeichnet als in $\boxed{8}$.

Auf diese Weise kann man die Gleichung so bilden:

Verschiebung von K: $y = \sin(x)$ um $\frac{4}{3}\pi$ nach links: $y = \sin\left(x + \frac{4}{3}\pi\right)$ K_1

Verschiebung von K: $y = \sin(x)$ um $\frac{2}{3}\pi$ nach rechts; $y = \sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$ auch K_1!

Und nun etwas ganz Spannendes:

Die Verschiebung von K: $y = \sin(x)$ um $\frac{1}{3}\pi$ nach links führt zu $y = \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$.

Dann wird diese Kurve an der x-Achse gespiegelt: $y = -\sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$

Wir erhalten so nochmals K_1!

Man erkennt jetzt, dass es unendlich viele Gleichungen für K_1 gibt:

Man verschiebt der Ursprung in irgendeine Nullstelle von K. Und dann hat man entweder $y = \sin\left(x \pm \frac{n}{3}\pi\right)$ oder $y = -\sin\left(x \pm \frac{n}{3}\pi\right)$ je nachdem, wie die Kurve verläuft.

Aufgabe: Zeichne bitte mit den in $\boxed{1}$ gezeigten Sinuswerten die Kurve K: $y = \sin(x)$ und dann noch die Kurve

K_2: $y = 2 \cdot \sin(x)$

$\Rightarrow \boxed{10}$

$\boxed{10}$ Gesucht ist K_2: $y = 2 \cdot \sin(x)$.

Für K_2 muss man die y-Koordinaten verdoppeln. Das ist sehr einfach:

$$f_2\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) = 2 \cdot \tfrac{1}{2} = 1$$

$$f_2\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) = 2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2} \approx 1{,}4$$

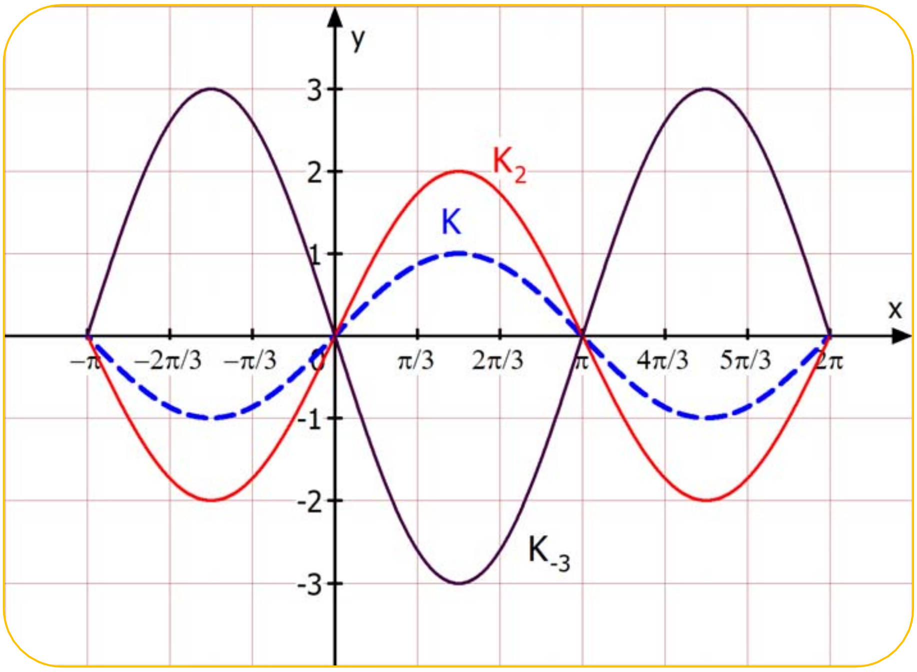
$$f_2\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) = 2 \cdot \tfrac{1}{3} = \sqrt{3} \approx 1{,}7$$

$$f_2\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = 2$$

Gradmaß	Bogenmaß	sin x
$x = 0^\circ$	$x = 0$	0
$x = 30^\circ$	$x = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$x = 45^\circ$	$x = \frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$x = 60^\circ$	$x = \frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$x = 90^\circ$	$x = \frac{\pi}{2}$	1
$x = 180^\circ$	$x = \pi$	0
$x = 270^\circ$	$x = \frac{3}{2}\pi$	-1
$x = 360^\circ$	$x = 2\pi$	0

Diese Werte wiederholen sich dann entlang der x-Achse.

Die Zeichnung enthält auch noch K_{-3} $y = -3 \cdot \sin(x)$



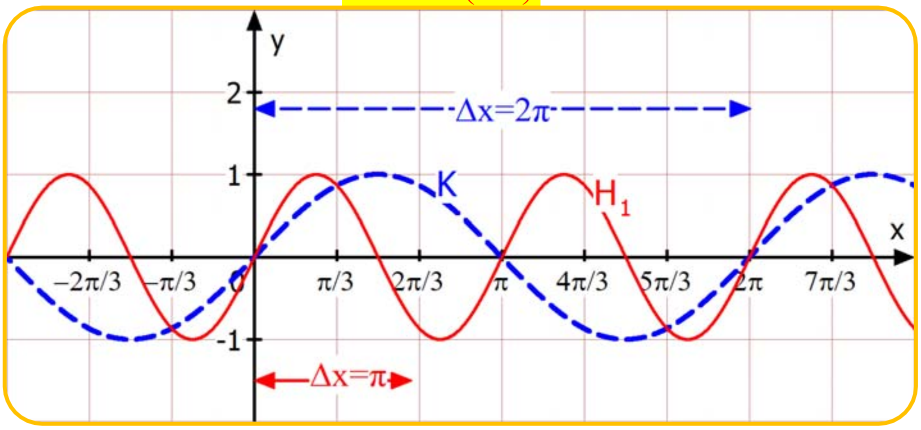
Nun wollen wir die Sinuskurve <u>in x-Richtung strecken</u>.

Zeichne bitte mit einer Wertetafel die Kurven

H_1: $y = \sin(2x)$ und H_2:; $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

$\Rightarrow$ $\boxed{11}$

$\boxed{11}$ Zuerst: H_1: $y = \sin(2x)$



Diese Überlegung hilft jetzt weiter:

Bekannt ist, dass K: y = sin(x) die Periode $\Delta x = 2\pi$ hat. Das bedeutet, dass nach jeweils einer Strecke der Länge $\Delta x = 2\pi$ in x-Richtung dieselben y-Werte erscheinen.

Man schreibt das so auf: $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

Um die Periodenlänge von H_1 zu entdecken, fragt man einfach:

Wie groß muss Δx sein, damit gilt: $\sin(2x + \Delta x) = \sin(2x)$

Die Antwort ist natürlich $\Delta x = 2\pi$

Dann gilt: $\sin(2x + 2\pi) = \sin(2x)$

Das ist dasselbe wie $\sin(2(x + \pi)) = \sin(2x)$

Daraus erkennt man, dass die Funktion $f(x) = \sin(2x)$ die Periode π hat.

Wertetabelle für $h_1(x) = \sin(2x)$ für die Zeichnung:

$h_1(0) = 0$ $\quad$ $h_1\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}71$

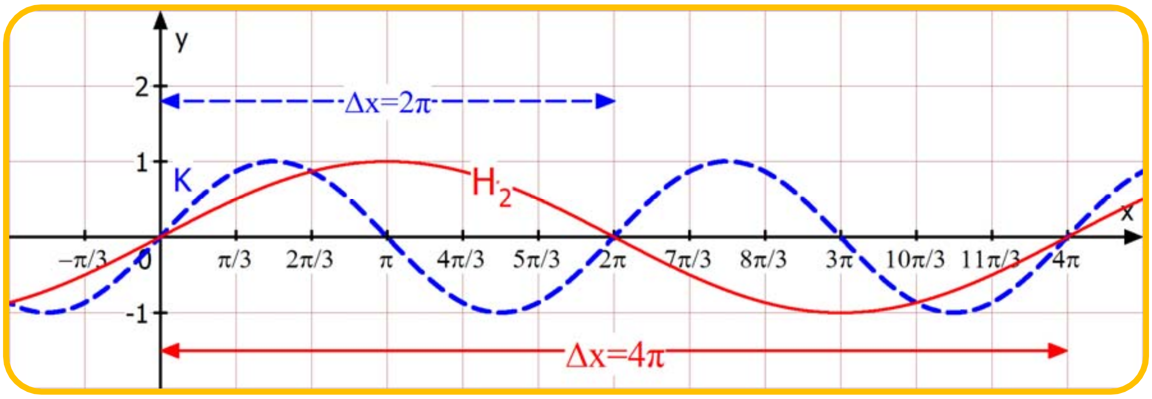
$h_1\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}87$ $\quad$ $h_1\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \sin(\pi) = 0$

usw.

Und nun zu $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

$\Rightarrow \boxed{12}$

$\boxed{12}$ Dann H_2: $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$



Man kann der Zeichnung entnehmen, dass H_2 die Periode $\Delta x = 4\pi$ hat.

Diese Überlegung hilft jetzt weiter:

Bekannt ist, dass K: $y = \sin(x)$ die Periode $\Delta x = 2\pi$ hat. Das bedeutet, dass nach jeweils einer Strecke der Länge $\Delta x = 2\pi$ in x-Richtung dieselben y-Werte erscheinen.

Man schreibt das so auf: $\sin(x + \Delta x) = \sin(x)$

also $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

Um die Periodenlänge von H_1 zu entdecken, fragt man einfach:

Wie groß muss Δx sein, damit gilt: $\sin\left(\frac{1}{2}x + \Delta x\right) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

Die Antwort ist natürlich $\Delta x = 2\pi$

Dann gilt: $\sin\left(\frac{1}{2}x + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

Das ist dasselbe wie $\sin\left(\frac{1}{2}(x + 4\pi)\right) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

Daraus erkennt man, dass die Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ die Periode 4π hat.

Wir verallgemeinern dies:

$\Rightarrow \boxed{12}$

$\boxed{13}$ **Man kann Streckungen in x-Richtungen mit Abbildungsgleichungen berechnen:**

Das Urbild sei der Punkt $P(x\,|\,y)$.

Durch Streckung in x-Richtung entsteht daraus $P'(k\cdot x\,|\,y)$

mit den Abbildungsgleichungen: $\left\{\begin{matrix} x' = k\cdot x \\ y' = y \end{matrix}\right\}$ (1)

$\boxed{\text{GW}}$ Wir wollen K: $y = \sin(x)$ in x-Richtung strecken.

Dazu muss man die Abbildungsgleichungen nach x und y <u>umstellen</u>:

$$\left\{\begin{matrix} x = \frac{1}{k}\cdot x' \\ y = y' \end{matrix}\right\} \qquad (2)$$

Das kann man in die Kurvengleichung einsetzen:

$$K:\quad y = \sin(x) \xrightarrow[\text{x-Richtung}]{\text{Streckung in}} K':\quad y' = \sin\left(\tfrac{1}{k}\cdot x'\right)$$

Auswertung: Der Streckfaktor ist der Kehrwert des x-Koeffizienten.

Beispiele:

$y = \sin(3x)$ entsteht aus y = sin(x) durch Stauchung mit dem Faktor $\frac{1}{3}$

$y = \sin(0{,}75x)$ entsteht aus y = sin(x) durch Streckung mit dem Faktor k:

$$k = \frac{1}{0{,}75} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

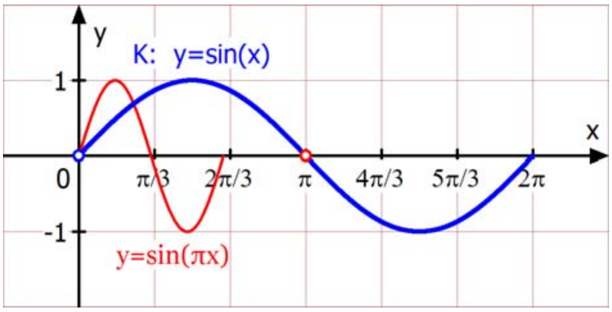
Eine Aufgabe für dich:

Zeichne mit einer kleinen Wertetafel die Kurve $y = \sin(\pi x) + 1$

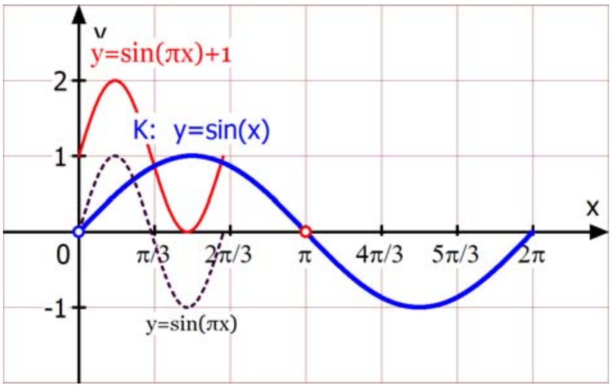
$\Rightarrow$ $\boxed{14}$

$\boxed{14}$ Es geht um diese Kurve: $y = \sin(\pi \cdot x) + 1$

1. Schritt: Der Faktor π verkürzt in x-Richtung mit $k = \frac{1}{\pi}$.



2. Schritt: Verschiebung in y-Richtung um $\Delta y = 1$



$\boxed{\text{GW}}$ **Methode: Man geht also in zwei Schritten vor:**

1. Schritt: Ermittle den Verlauf von $y = \sin(\pi \cdot x)$ durch eine Stauchung in x-Richtung

2. Schritt: Verschiebe diese Kurve um 1 in y-Richtung.

Nun wollen wir in x-Richtung und in y-Richtung strecken:

Kannst du die Lage von G: $y = 4 \cdot \sin(3x)$ ermitteln?

Also wo ist der Bildpunkt der Nullstelle $N(0|0)$?

$\Rightarrow$ $\boxed{15}$

$\boxed{15}$ Man kann vermuten, dass G: $y = 4 \cdot \sin(3x)$ aus K: $y = \sin(x)$ so entsteht:

1. Streckung bzw. Stauchung in x-Richtung mit $k_1 = \frac{1}{3}$
2. Streckung bzw. Stauchung in y-Richtung mit $k_2 = 4$

Dies beweisen wir mit den Abbildungsgleichungen:

Zu (1): Streckung bzw. Stauchung in x-Richtung mit $k_1 = \frac{1}{3}$: $\alpha: \begin{Bmatrix} x' = \frac{1}{3}x \\ y' = y \end{Bmatrix}$

Zu (2): Streckung bzw. Stauchung in x-Richtung mit $k_2 = 4$: $\beta: \begin{Bmatrix} \overline{x} = x' \\ \overline{y} = 4y' \end{Bmatrix}$

Zur Abbildung von Kurven muss man die Gleichungen umstellen, man nennt diese Abbildung dann die Umkehrabbildung:

$$\alpha^{-1}: \begin{Bmatrix} x = 3x' \\ y = y' \end{Bmatrix} \qquad \beta^{-1}: \begin{Bmatrix} x' = \overline{x} \\ y' = \frac{1}{4}\overline{y} \end{Bmatrix}$$

Verkettung (Nacheinander Ausführung: „β nach α“

$$P(x \mid y) \xrightarrow{\alpha} P(x' \mid y') \xrightarrow{\beta} P(\overline{x} \mid \overline{y})$$

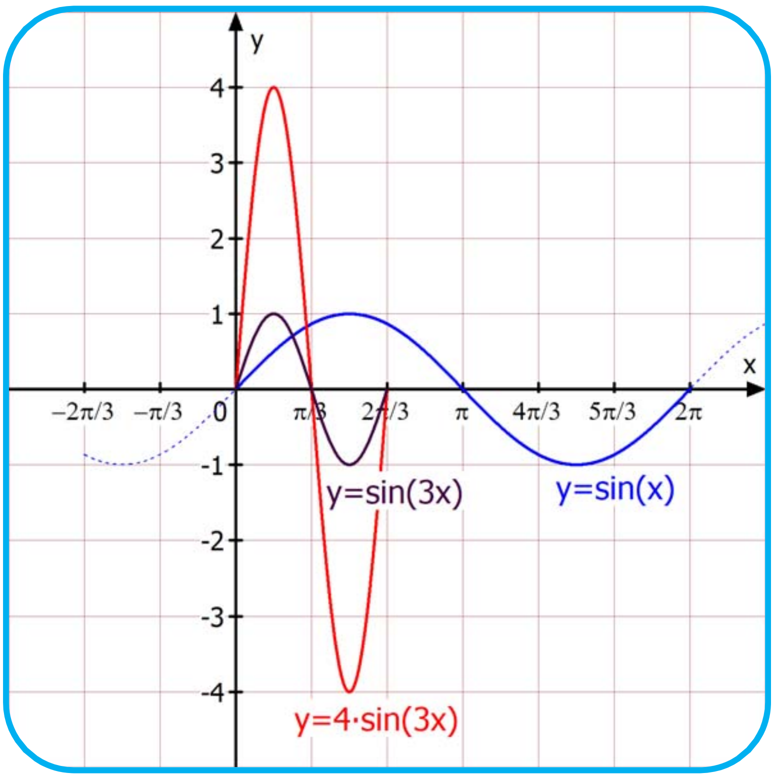
$$y = \sin(x) \xrightarrow{\alpha} y' = \sin(3x') \xrightarrow{\beta} \underbrace{\tfrac{1}{4}\overline{y} = \sin(3\overline{x})}_{\overline{y} = 4 \cdot \sin(3\overline{x})}$$ Und das war zu beweisen.

Letzte Aufgabe:

Untersuche genauso:

$y = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\pi\right)$

$\Rightarrow$ $\boxed{16}$



$\boxed{16}$ Gesucht ist der Graph von $y = 2 \cdot \sin\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{6}\pi\right)$

Erinnerst du dich: Zuerst muss man in der Sinus-Klammer den Streckfaktor

ausklammern: $y = 2 \cdot \sin\left(\tfrac{1}{2}\left(x + \tfrac{1}{3}\pi\right)\right)$

Jetzt haben wir in x-Richtung eine Verschiebung und eine Streckung.

Merke: Man sollte zuerst die Streckung durchführen, dann die Verschiebung. Das versteht man, wenn man die Kurve y = sin(x) zweimal nacheinander abbildet. Die andere Reihgenfolge ergibt ein andere Kurve.

Abbildungsgleichungen:

(1) Streckung mit k = 2 (Kehrwert!) in x-Richtung:

$$\alpha: \begin{Bmatrix} x' = 2x \\ y' = y \end{Bmatrix} \Rightarrow \alpha^{-1}: \begin{Bmatrix} x = \tfrac{1}{2}x' \\ y = y' \end{Bmatrix}$$

Bildkurve: $K:\ y = \sin(x) \xrightarrow{\alpha} K':\ y' = \sin\left(\tfrac{1}{2}x'\right)$

(2) Verschiebung in die negative x-Richtung um $\tfrac{1}{3}\pi$:

$$\beta: \begin{Bmatrix} x'' = x' - \tfrac{1}{3}\pi \\ y'' = y' \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x' = x'' + \tfrac{1}{3}\pi \\ y'' = y' \end{Bmatrix}$$

Nächste Bildkurve:

$$K':\ y' = \sin\left(\tfrac{1}{2}x'\right) \xrightarrow{\beta} y'' = \sin\left(\tfrac{1}{2}\left(x'' + \tfrac{1}{3}\pi\right)\right) = \sin\left(\tfrac{1}{2}x'' + \tfrac{1}{6}\pi\right)$$

(3) Streckung in y-Richtung mit k = 2

$$\gamma: \begin{Bmatrix} \overline{x} = x'' \\ \overline{y} = 2y'' \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x'' = \overline{x} \\ y'' = \tfrac{1}{2}\overline{y} \end{Bmatrix}$$

Gesuchte Kurve:

$$K':\ y'' = \sin\left(\tfrac{1}{2}x'' + \tfrac{1}{6}\pi\right) \xrightarrow{\gamma} \overline{K}:\ \tfrac{1}{2}\overline{y} = \sin\left(\tfrac{1}{2}\overline{x} + \tfrac{1}{6}\pi\right)$$

Ergebnis: $\overline{K}:\ \overline{y} = 2\sin\left(\tfrac{1}{2}\overline{x} + \tfrac{1}{6}\pi\right)$

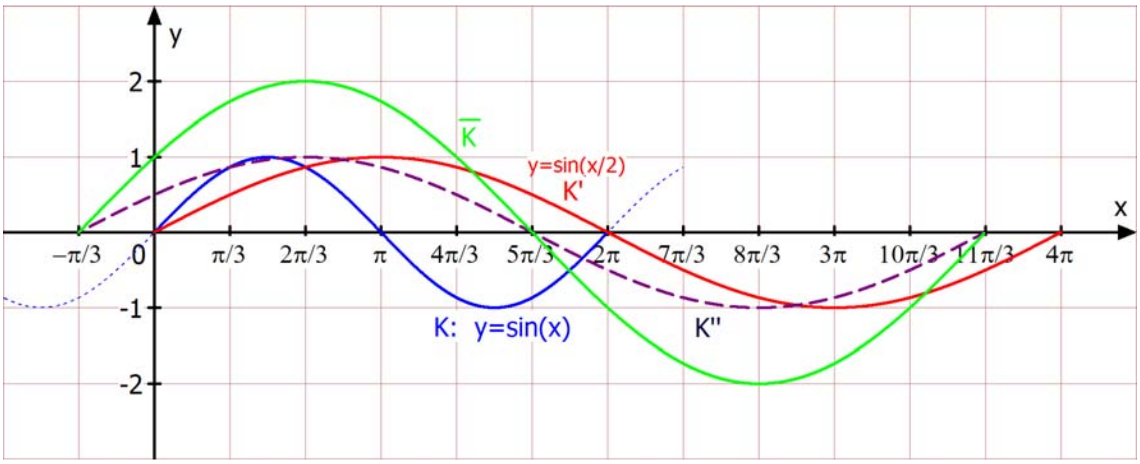
Ergebnis: $\overline{K}:\quad y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\pi\right)$

Die Striche an x und y werden nur zur Umrechnung auf die Bildkurve benötigt.

Nach der letzten Abbildung kann man sie weglassen.

Die Zeichnung zeigt diese Abbildungskette:

$$\underbrace{K}_{\sin(x)} \xrightarrow{\ \alpha\ } \underbrace{K'}_{\sin(x/2)} \xrightarrow{\ \beta\ } \underbrace{K''}_{\sin\left(\frac{1}{2}\left(x''+\frac{1}{3}\pi\right)\right)} \xrightarrow{\ \gamma\ } \underbrace{\overline{K}}_{y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\pi\right)}$$



Damit endet diese Stunde. Hast du dich gut geschlagen?

ciao !